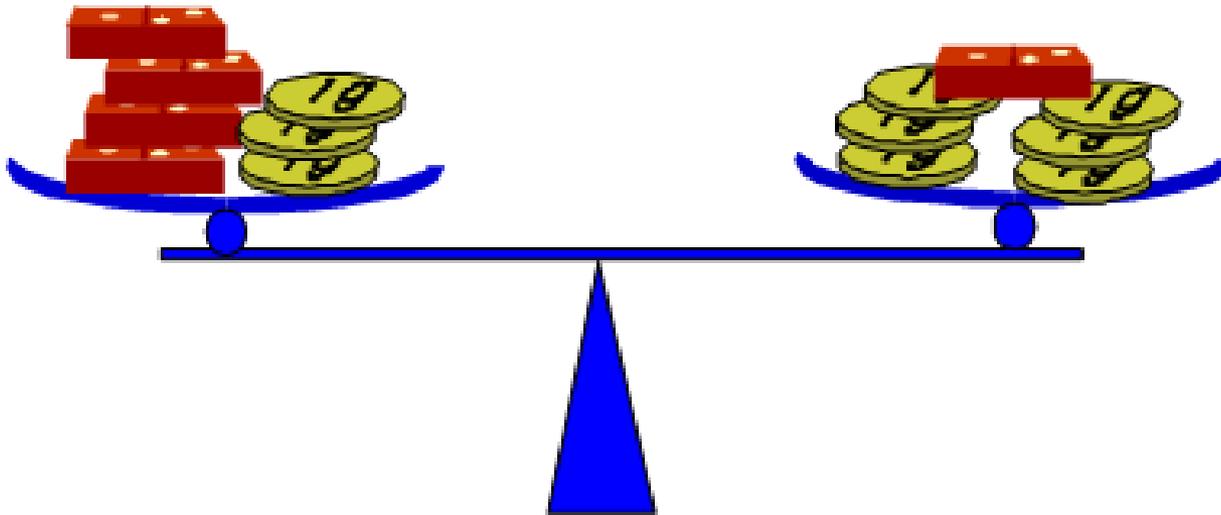


Ejemplo 1

¿Cuánto pesa una ficha de dominó?

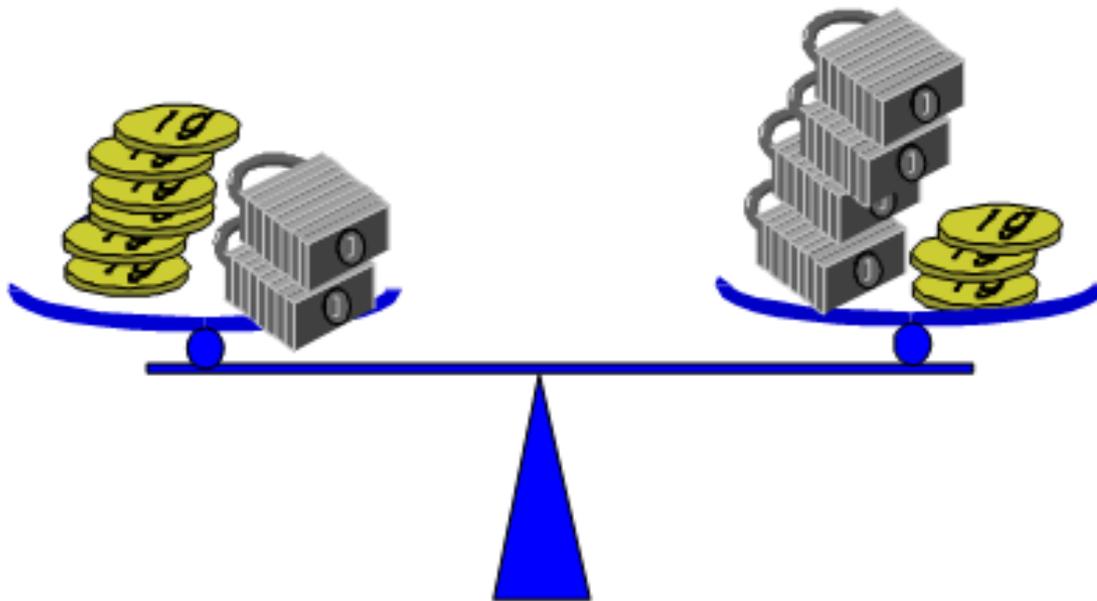


Otra forma es representando lo que hay de cada lado

$$4 D + 3 = 1 D + 6$$

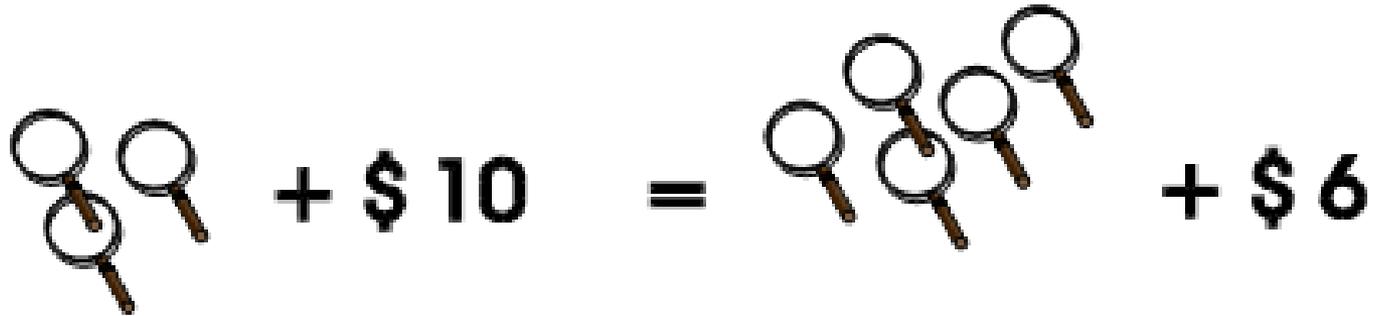
Ejemplo 2

- ¿Cuánto pesa cada candado?



Ejemplo 3

- ¿Cuánto vale una lupa?



The image shows a visual equation. On the left side, there are three magnifying glass icons arranged in a cluster, followed by a plus sign and the text "\$ 10". In the center is an equals sign. On the right side, there are five magnifying glass icons arranged in a cluster, followed by a plus sign and the text "\$ 6".

Ejemplo 4

- Dentro de un año la edad de Mariana será el doble de la edad que tenía un año atrás.
¿Cuántos años tiene Mariana?
 - X es la edad actual de Mariana
 - $(X-1)$ es la edad que tenía el año pasado
 - $(X+1)$ es la edad que tendrá dentro de un año

$$2(X-1) = X+1$$

¿Qué es una ecuación?

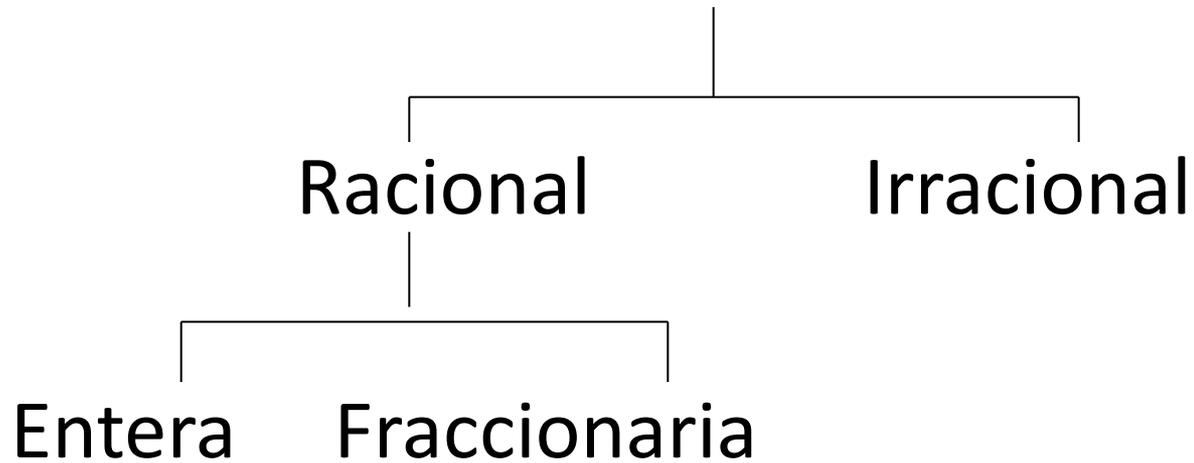
- Una ***ecuación*** es una igualdad en la cual participan algunas cantidades desconocidas, en general designadas por letras.
- Las cantidades desconocidas se denominan ***incógnitas***.
- La palabra ecuación proviene de “aequare” que en latín significa igualar.

Ecuaciones

- Las ecuaciones reciben distinto nombre según las operaciones que afectan a las incógnitas.
- **Tipos de ecuaciones**
 - Algebraicas
 - Trascendentes ← **Este curso**
 - La incógnita está afectada por relaciones trigonométricas, logarítmicas, etc

Ecuaciones

Ecuación Algebraica



Ecuaciones Algebraicas

- Si tiene una sola cantidad desconocida diremos que es una **ecuación con una incógnita**.
- Si la incógnita está afectada por las operaciones de suma, resta, producto, potencia o cociente se llama **ecuación algebraica racional**

Ecuación algebraica racional

- Una ecuación algebraica racional es **entera** si la incógnita no está en ningún denominador
- **Ejemplos**

$$(5x + 1)(x + 1) = 0$$

$$3 + \frac{x-1}{2} = x + \sqrt{3}$$

Ecuación algebraica racional

- Una ecuación algebraica racional es **fraccionaria** si la incógnita está en algún denominador.
- **Ejemplo**

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 1} = 3$$

Ecuación algebraica irracional

- Si la incógnita aparece en un radicando se dice que es una ecuación algebraica irracional
- **Ejemplo**

$$\sqrt{x+1} = 5$$

Solución de una ecuación

- Volviendo a la ecuación de la edad de Mariana

$$2(X-1) = X+1$$

vemos que reemplazando X por 3 se obtiene la igualdad $4 = 4$

En este caso se dice que 3 es **solución de la ecuación**

Solución de una ecuación

- Una **solución** de una ecuación algebraica con una incógnita x es un número x_0 tal que, al reemplazar x por x_0 en la ecuación, ésta se transforma en una identidad numérica.
- Resolver una ecuación significa determinar si tiene solución y en tal caso hallar todas las soluciones.

Solución de una ecuación

- Ejemplos

a) $3x - 9 = 0$ tiene solución $x_0 = 3$

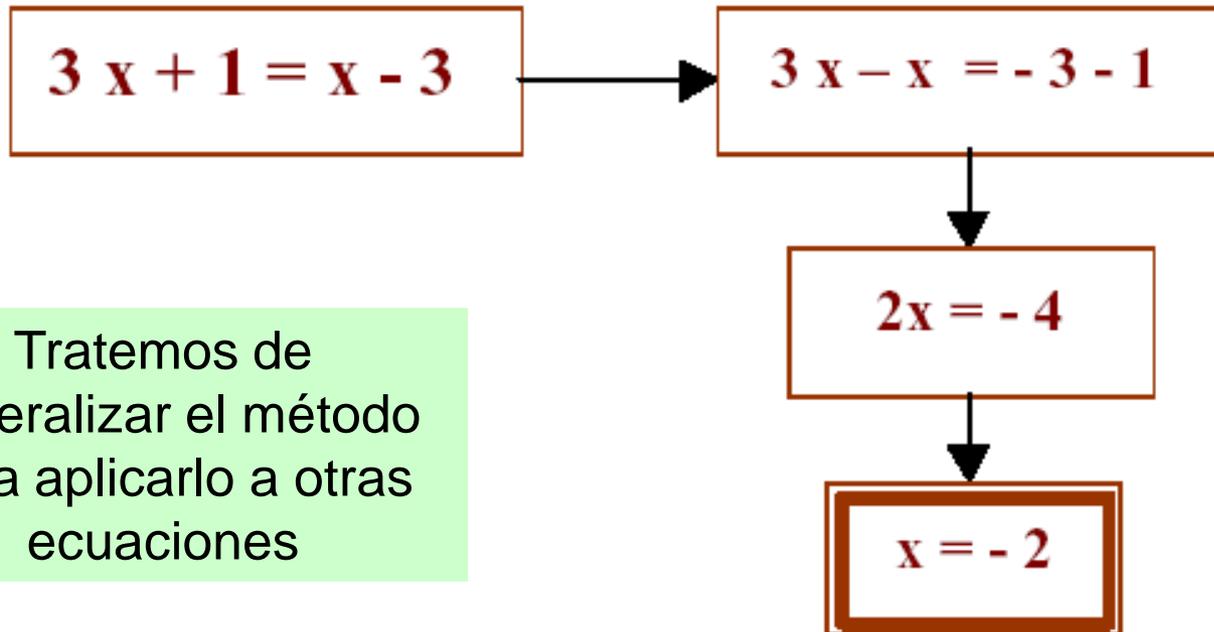
b) $2x + 1 = 2x$ no tiene solución

c) $(x-1)(x+1) = 0$ tiene solución,

son $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

Resolución de una ecuación

- Ejemplo



Tratemos de generalizar el método para aplicarlo a otras ecuaciones

Única solución

Ecuaciones equivalentes

- Dos ecuaciones son equivalentes si admiten las mismas soluciones.
- ¿Cómo se obtienen dos ecuaciones equivalentes?
 - Sumando o restando a ambos lados de la ecuación la misma expresión.
 - Multiplicando ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero

Ejemplo: Resolver $2x+4 = 12$

- Restar 4 a ambos lados de la igualdad

$$2x + 4 - 4 = 12 - 4$$

$$2x = 8$$

- Multiplicar ambos miembros por $1/2$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2} * 8$$

$$\therefore x = 4$$

Ejercicio

- Resolver utilizando ecuaciones equivalentes

$$\text{a) } 3x^2 = 5x^2 + 6x$$

$$\text{b) } x^3 - 4x^2 = 6 - 6x^2 + x^3$$

Ejercicio

- ¿Son equivalentes? Justificar

$$\text{a) } x + 3 = 3 \quad ; \quad x + 3 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{x}$$

$$\text{b) } x - 2 = 3 \quad ; \quad x (x - 2) = 3 x .$$

Ejercicio: Marca con * la casilla donde se trabajó en forma errónea

$x = y$	
$x^2 = x \cdot y$	
$x^2 - y^2 = xy - y^2$	
$(x - y)(x + y) = y(x - y)$	
$x + y = y$	
$2x = x$ (pues $x = y$)	
$2 = 1$; ? ;	

Ecuaciones lineales con una incógnita

- Dados dos números a y b , una ecuación con una incógnita se dice ***lineal*** si es de la forma:

$$a x + b = 0$$

- La solución se obtiene sumando $-b$ y multiplicando a ambos lados por $1/a$ (si $a \neq 0$)

$$x = -b/a$$

Ecuaciones lineales con una incógnita

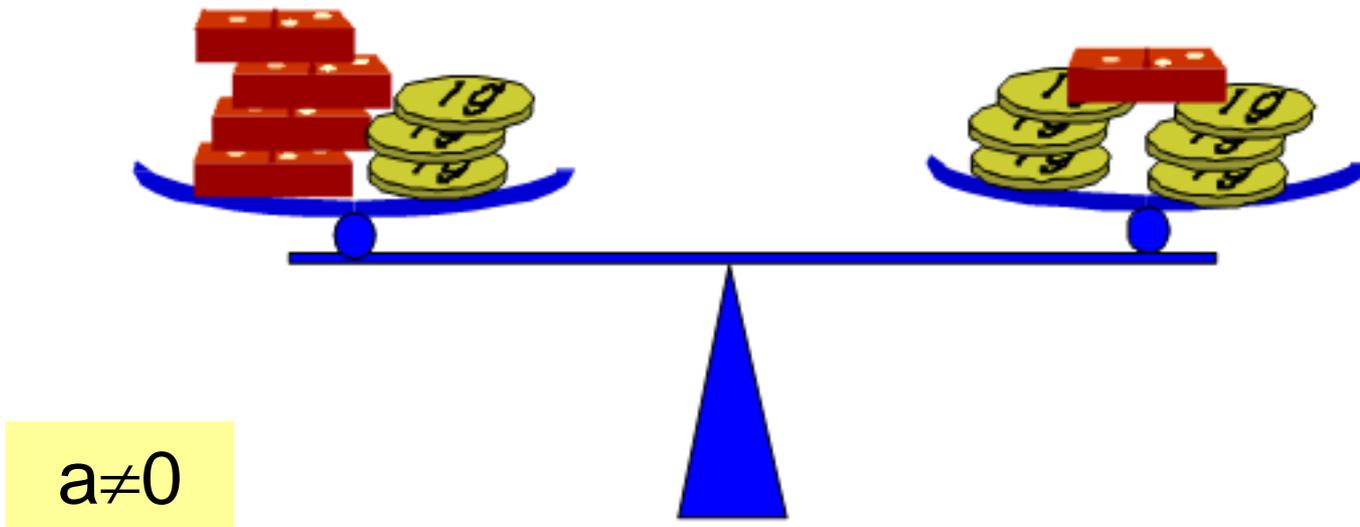
- ¿Qué pasa si $a = 0$?

$$0x + b = 0$$

- Si $b=0$, cualquier número es solución
- Si $b \neq 0$, la ecuación no tiene solución

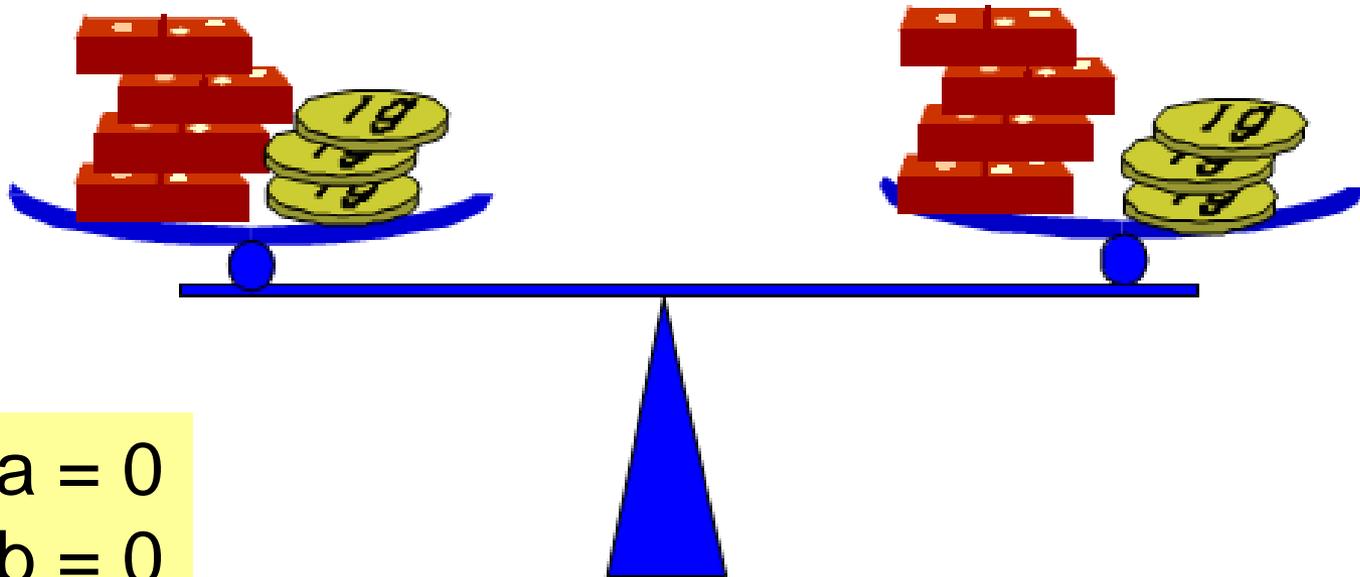
Ecuaciones lineales con una incógnita

- Si la cantidad de fichas en un plato es distinta de la cantidad en el otro plato, se puede determinar exactamente el peso de cada una.



Ecuaciones lineales con una incógnita

- La balanza queda equilibrada cualquiera sea el peso de la ficha de dominó.

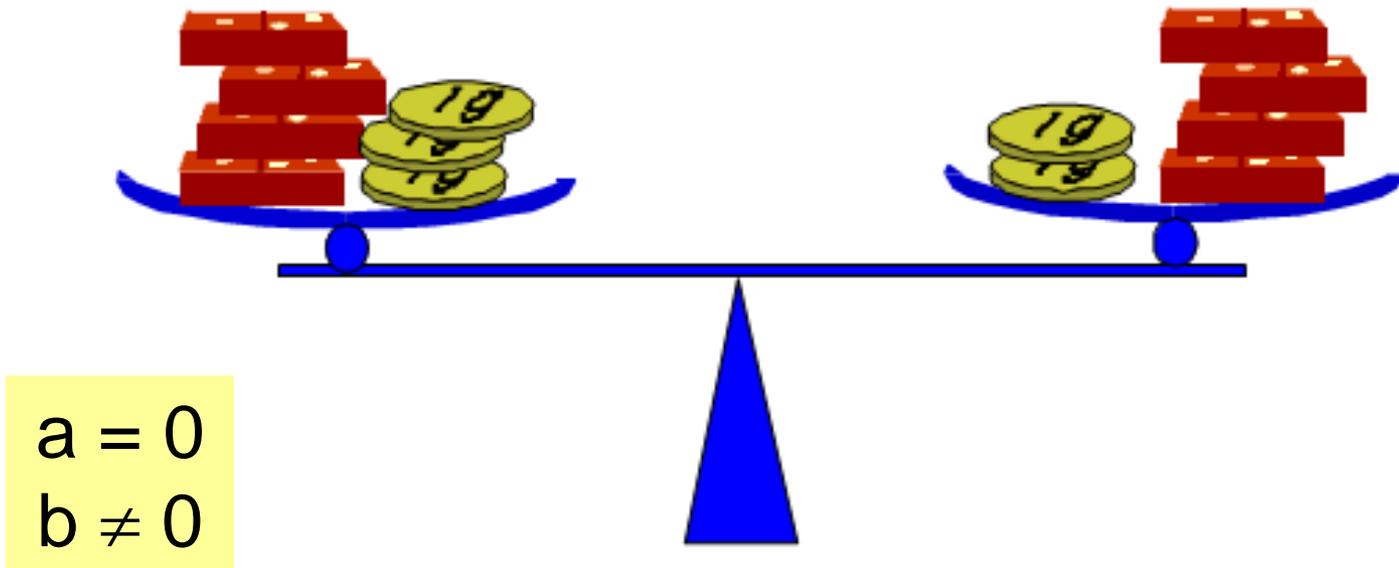


$$a = 0$$

$$b = 0$$

Ecuaciones lineales con una incógnita

- Pese lo que pese la ficha, la balanza nunca estará equilibrada.



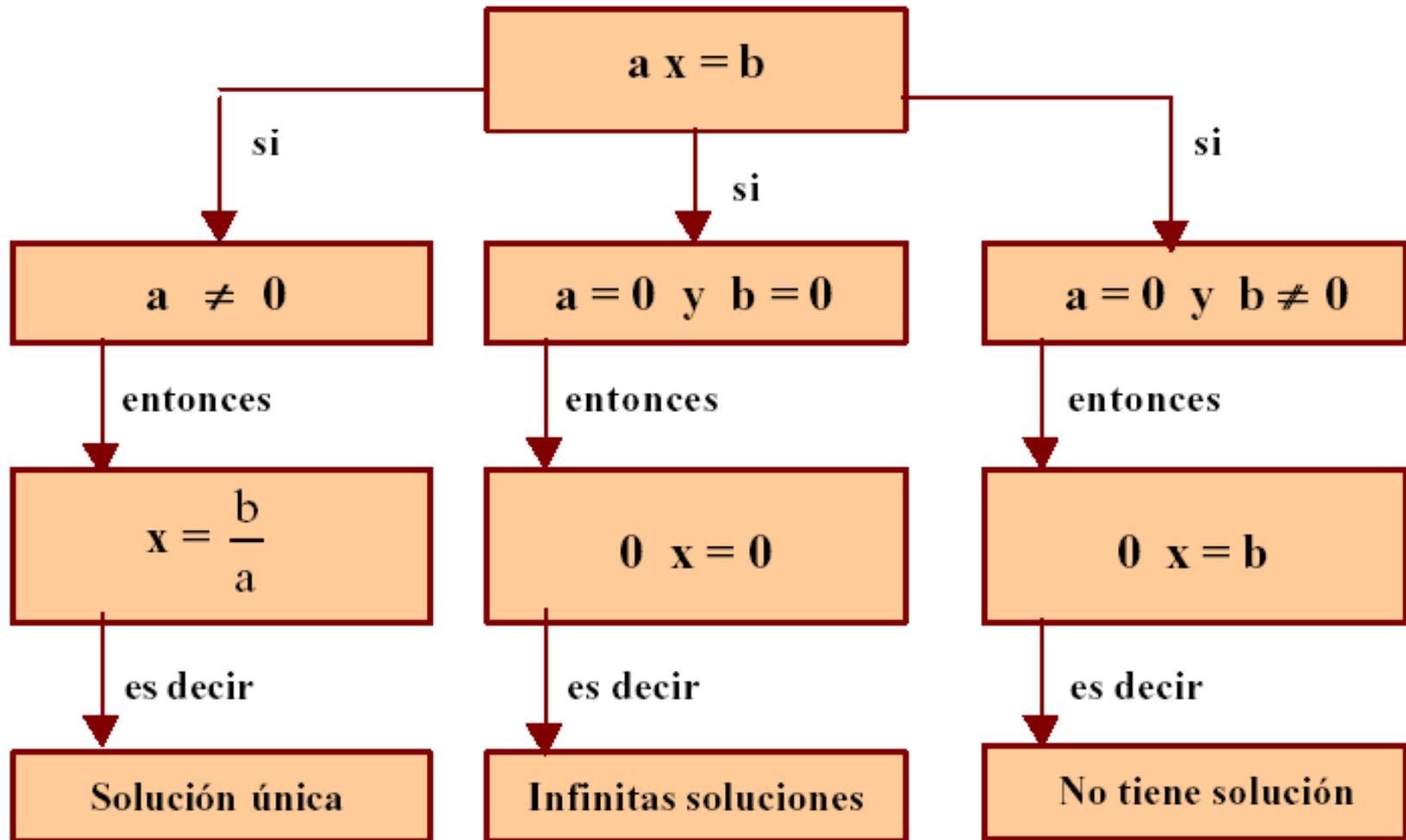
Resolver

$$\text{a) } 6 \left(x - \frac{1}{2} \right) = 2x - 1$$

$$\text{b) } 5 (x + 1) - x = 4x + 15$$

$$\text{c) } 2x = 2 (x + 1) - 2$$

¿Cuántas soluciones tiene una ecuación lineal?



Ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales se caracterizan por ser las únicas que, cuando tienen solución,
la solución es **única** o
tiene **infinitas** soluciones.

Ejercicios

a) $10 - 3x = x - 2$

b) $a - x = 3 (x - a)$

c) $-x + 3 = - 2 x + x + 7$

d) $3 (2 - x) + 1 = -x + \frac{5}{2} (1 - x) + \frac{x + 3}{2}$

Ejercicios

$$\text{e) } \frac{1}{3}x - x = \frac{1}{4}x + 1$$

$$\text{f) } \frac{x-1}{3} + \frac{x+2}{5} = 1$$

$$\text{g) } a - x = 3(x - a)$$

Problemas

- Una modista desea cortar una cinta de 213 cm de longitud en tres tramos. Si cada tramo debe tener 2 cm más que el anterior, ¿cómo debe hacer los cortes?
- Un cable que mide 60 cm se corta en 4 tramos, y cada tramo sucesivo tiene el doble de longitud que el anterior. Hallar la longitud del tramo más largo.

Problema

- Asfaltar una calle costó \$33.000.000. Los vecinos pagaron el doble de lo que aportó la Municipalidad, mientras que la Provincia contribuyó con las dos terceras partes del aporte Municipal.

¿Cuánto dinero pusieron los vecinos?

Problema

- Se quieren separar 77 gramos de oro en dos partes de tal manera que la mayor tenga 19,5 gramos más que la menor ¿Cuántos gramos debe contener cada parte?
- Hallar un número sabiendo que si a su triplo se le resta uno se obtiene lo mismo que si a su tercera parte se le suma uno.
- ¿Cuál es el número cuyo doble supera en 15 a su mitad?

Problema

- Martín salió a recorrer, en forma sucesiva, varios negocios de su barrio y le fue proponiendo a sus dueños lo siguiente:

En una librería propuso: “Présteme tanto dinero como el que tengo ahora en mi billetera y gastaré 100\$”.

En una perfumería y en un restaurante propone lo mismo. Al volver a su casa comenta: “¡Me quedé sin un centavo!”

¿Cuánto dinero tenía Martín al entrar a la librería?

Rta = \$ 87.50

Ejercicio

- El número 365 tiene la característica de ser la suma de los cuadrados de tres números naturales consecutivos. Indique cuáles son.

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 365$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 365$$

$$3x^2 + 6x - 360 = 0$$

Se trata de una ecuación algebraica de segundo orden o **ecuación cuadrática**

Ecuación Cuadrática

- Una ecuación con una incógnita se dice ***cuadrática*** si es de la forma:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

donde

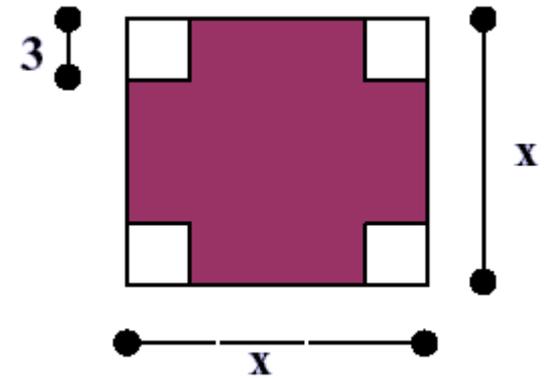
– $a \neq 0$

– b y c son números dados llamados coeficientes de la ecuación.

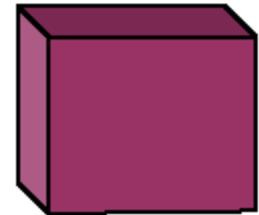
o cualquier otra equivalente a ella.

Ejercicio

- Queremos confeccionar una caja de cartón sin tapa con una hoja de cartón cuadrada.
- La caja debe tener 3 cm de altura y un volumen de 48 cm^3 .
- ¿Qué medidas debe tener, como mínimo, la hoja de cartón?



$$3(x - 6)^2 = 48$$



Ecuaciones cuadráticas de fácil resolución

1- Falta el término en x

La ecuación es de la forma: $ax^2 - c = 0$
con $a \cdot c > 0$.

Soluciones: $x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$

EJEMPLO:

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

soluciones: $x = \pm 2$

Ecuaciones cuadráticas de fácil resolución

2- Falta el término independiente

La ecuación es de la forma: $ax^2 + bx = 0$

Una ecuación equivalente es: $x(ax + b) = 0$

Soluciones: $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$

EJEMPLO:

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

soluciones: $x = 0$ y $x = 3$

Ecuaciones cuadráticas de fácil resolución

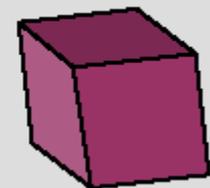
3- Trinomio cuadrado perfecto

La ecuación es de la forma: $(ax + b)^2 = c$;
 $c > 0$

Soluciones: $x = \frac{-b \pm \sqrt{c}}{a}$

EJEMPLO:

La caja



Retomemos el ejercicio del número 365

$$3x^2 + 6x - 360 = 0$$

- Utilizando una ecuación equivalente

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

- Completando el trinomio cuadrado perfecto

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - 120 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 121 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 121$$

$$x + 1 = \pm 11$$

$$x_1 = 10 \quad ; \quad x_2 = -12$$

Generalicemos el método que aplicamos en este ejercicio

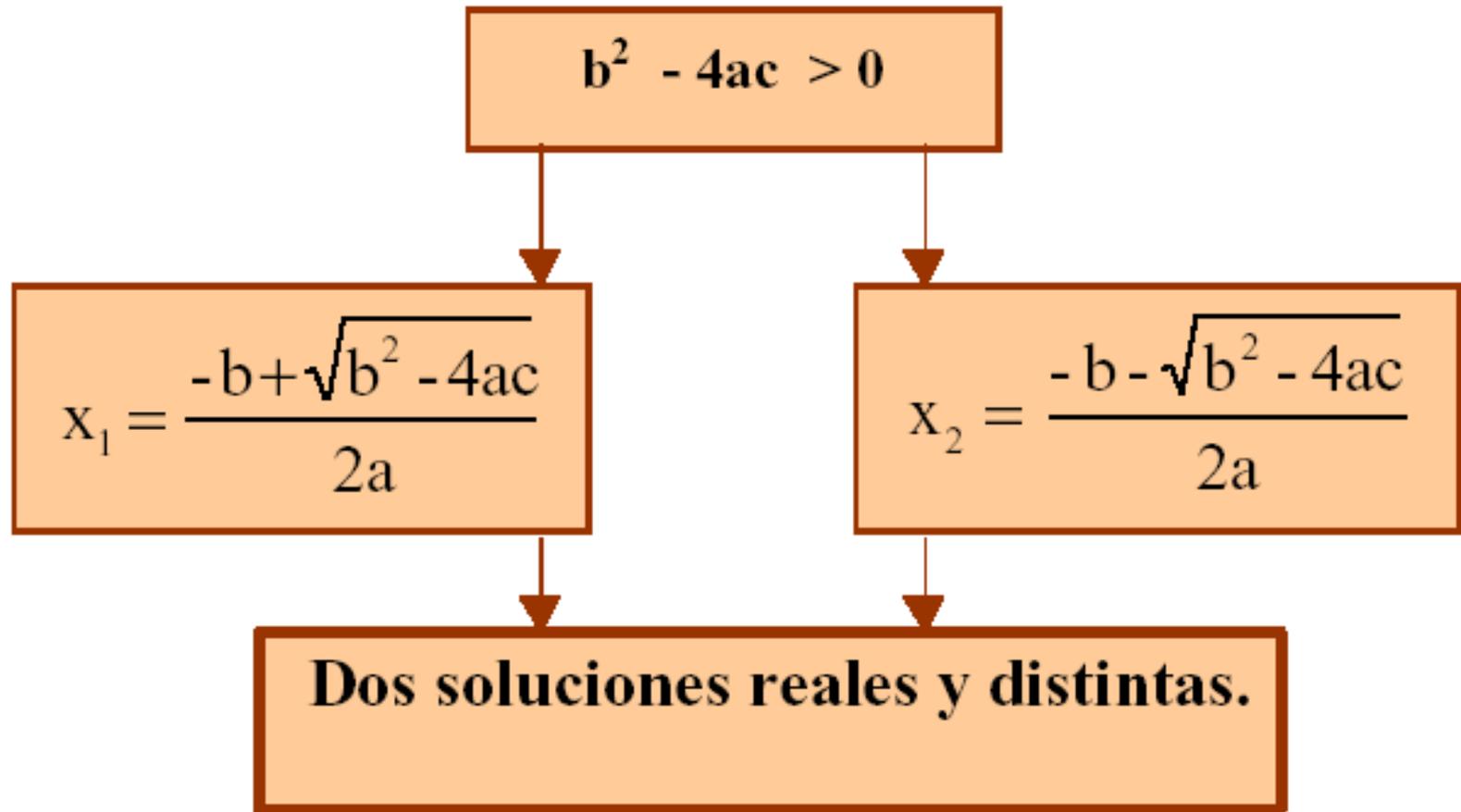
Resolución de la ecuación cuadrática

$$a x^2 + b x + c + 0$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Características de las soluciones de la ecuación cuadrática



Características de las soluciones de la ecuación cuadrática

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Soluciones reales coincidentes

Características de las soluciones de la ecuación cuadrática

$$b^2 - 4ac < 0$$



No tiene solución real

Al número $b^2 - 4ac$ se lo llama ***discriminante*** justamente por el rol que juega

Ejercicios

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

b) $x^2 + 3x + 3 = 0$

c) $3x^2 - 18x + 27 = 0$

d) $(x - 1)(x - 3) = 1$

Ejercicio

- Encuentre dos números consecutivos y positivos enteros cuyo producto sea 30.
- El número 365 tiene la característica de ser la suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos. Indique cuáles son.

Ejercicios

- Utilizando el discriminante decir cuántas soluciones tiene cada una de las siguientes ecuaciones

$$a) \quad x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$b) \quad x^2 - \frac{2}{3}x + 1 = 0$$

$$c) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 3x + 1 = 0$$

$$d) \quad -\frac{2}{3}x^2 + \sqrt{2}x - \frac{1}{2} = 0$$